

Rutschvorgänge auf quergeneigter Fahrbahn

Zusammenfassung

In einer früheren Veröfentlichung zur gleichen Thematik [1] wurde gezeigt, daß die mathematische Behandlung von Rutschvorgängen auf quergeneigter Fahrbahn auf ein Differentialgleichungssystem führt, das mit Hilfe vereinfachender Annahmen einer analytischen Lösung zugeführt werden kann. Bei genauerer Betrachtung zeigt sich, daß diese Annahmen im Normalfall zulässig sind, für Fahrbahnen mit starker Querneigung oder bei sehr niedrigen Haftreibungskoeffizienten jedoch unzulässig sind. In diesem Aufsatz wird der analytischen Lösung eine numerische Lösung des vollständigen Differentialgleichungssystems gegenübergestellt und der Fehlereinfluß analysiert.

Summary

An earlier paper pointed out that the mathematical treatment of the slid-process with lateral incline leads to a set of differential equations that can analytically be solved under simplifying conditions. A thorough elaboration shows that these simplifying conditions are fulfilled under normal circumstances but violated under conditions of low friction coefficient or steep lateral incline. This paper compares the analytical solution with numerical solutions under non-simplifying conditions.

1 Einleitung

Insbesondere bei Glatteis-Bedingungen hat die Fahrbahnquerneigung einen besonders starken Einfluß auf die Endlage von Körpern nach Rutschvorgängen. Gerade unter diesen Voraussetzungen sind jedoch die in [1] bei der Lösung getroffenen vereinfachenden Annahmen nicht ohne weiteres zulässig. In diesem Aufsatz wird der analytischen Lösung eine numerische Lösung des vollständigen Differentialgleichungssystems gegenübergestellt und die Fehlereinflüsse anschließend analysiert.

2 Mathematische Ausarbeitung

Der Rutschvorgang (**Bild 1**) eines Körpers auf einer schiefen Ebene wird durch folgendes Differentialgleichungssystem beschrieben

$$\ddot{x} = -\mu g \cos \alpha \cos \gamma \quad 1$$

$$\vec{v} = -\mu g \cos \alpha \sin \gamma + g \sin \alpha \quad (2)$$

$$\tan \gamma = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \quad 3$$

Dieses nichtlineare Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung wurde in [1] durch die Bedingungen

$$\cos \gamma \approx 1 \quad ; \quad \sin \gamma \approx \tan \gamma \quad 4$$

entkoppelt und einer analytischen Lösung zugeführt. Die Lösung des Differentialgleichungssystems wird wesentlich übersichtlicher, wenn man zuvor die dimensionslosen Variablen

$$\xi \doteq \frac{2}{v_0 T} x ; \quad \eta \doteq \frac{2\mu}{\tan \alpha} \frac{2}{v_0 T} y ; \quad \tau \doteq \frac{t}{T} \quad 5$$

mit

$$T \doteq \frac{v_0}{\mu g \cos \alpha} \quad \text{einführt.} \quad 6$$

Mit diesen Definitionen lässt sich das Differentialgleichungssystem in

$$\text{in} \quad \ddot{\eta} = - \frac{2}{\sqrt{1 + \left(\theta \frac{\dot{\eta}}{\dot{\xi}} \right)^2}} \quad (7)$$

***Dipl.-Ing. Wolfgang Hugemann, Sachverständiger im
Ingenieurbüro Schimmelpennig + Becke, Münsterstraße 101,
4400 Münster-Wolbeck**

$$\bar{\eta} = 4 - \bar{\xi} \frac{\dot{\eta}}{\dot{\xi}} \quad 8$$

mit

$$\theta \doteq \frac{\tan \alpha}{2\mu} \quad 9$$

überführen.

Für die Linearisierung muß Gl. (4) dann durch die Bedingung

$\theta \approx 0$ 10

ersetzt werden. Als analytische Lösung ergibt sich unter dieser Voraussetzung

$$\dot{\eta} = -4(1 - \tau) \ln(1 - \tau) \quad 11$$

$$\eta = 1 - (1 - \tau)^2 [1 - \ln (1 - \tau)^2] \quad 12$$

bzw.

$$\eta' = -\ln(1 - \xi) \quad 13$$

$$\eta = \xi + (1 - \xi) \ln (1 - \xi) \quad 14$$

In [1] wurde die Zulässigkeit der Vereinfachung Gl. (4) bzw. Gl. (10) im Anschluß an die analytische Lösung mittels Gl. (13) überprüft. Diese Vorgehensweise ist insofern nicht ganz korrekt, als daß dies zwar eine notwendige, jedoch keine hinreichende Bedingung für die Zulässigkeit der Vereinfachung Gl. (4) ist. Es könnte sich ebenfalls, um ein Schlagwort der Postmoderne zu gebrauchen, um eine Self-fulfilling-prophecy handeln, bei der die Lösung deswegen die eingangs gestellte Bedingung erfüllt, eben weil diese bei der analytischen Lösung verwendet wurde. Eine wirklich aussagekräftige Überprüfung ist deshalb nur über den Vergleich der analytischen mit einer numerischen Lösung des vollständigen Differentialgleichungssystems möglich.

Die dimensionslose Darstellung des Differentialgleichungssystems Gl. (7) und (8) zeigt deutlich, daß die Zulässigkeit der Vereinfachung Gl. (10) sicherlich vom Wert des Parameters Θ abhängig ist. Für $\Theta = 1/2$ gilt

$$\mu = \tan \alpha \quad 15$$

$$\mu g \cos \alpha = g \sin \alpha \quad 16$$

womit sich Reibkraft und Hangabtriebskraft die Waage halten und sich der Körper im Endzustand mit konstanter Geschwindigkeit hangabwärts bewegt. Für noch größere Werte des Parameters Θ bewegt sich der Körper stetig beschleunigt hangabwärts; für $\Theta < 1/2$ wird er stets zum Stillstand kommen.

Bild 2 bis Bild 4 zeigen Lösungen des Differentialgleichungssystems für Werte des Parameters Θ zwischen 0 und 0,3. Es zeigt sich, daß, obwohl sich bereits ab $\tau = 0,5$ erste Abweichungen zwischen den Lösungen für die dimensionslose Geschwindigkeit ab-

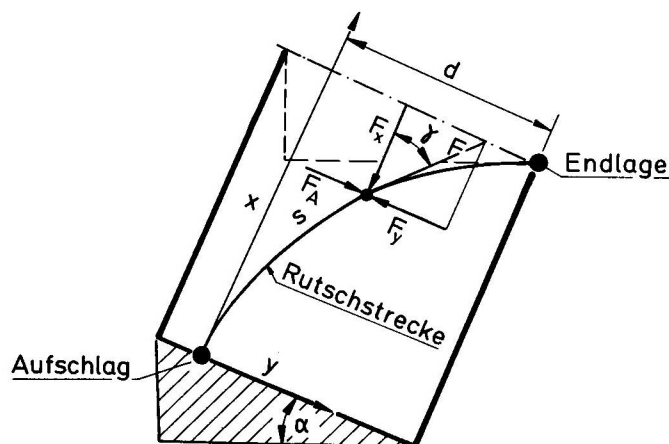


Bild 1 Rutschvorgang auf einer schiefen Ebene
Fig. 1 Slid-process on an inclined plane

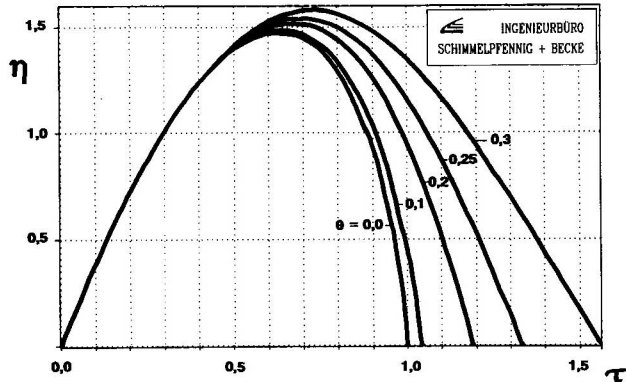


Bild 2 Verlauf der dimensionslosen Geschwindigkeit in Querrichtung über der dimensionslosen Zeit

Fig. 2 Dimensionless lateral velocity versus dimensionless time

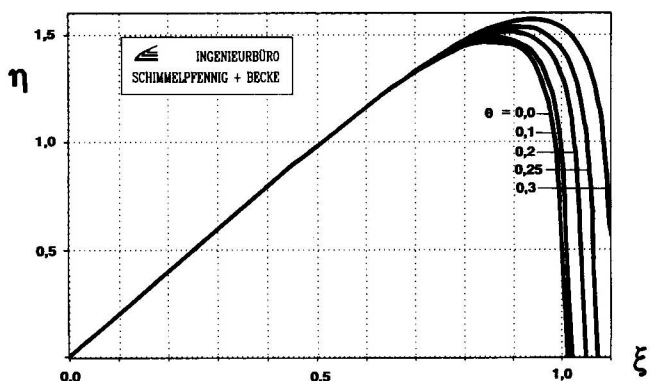


Bild 3 Verlauf der dimensionslosen Geschwindigkeit in Querrichtung über dem dimensionslosen Weg in Längsrichtung

Fig. 3 Dimensionless lateral velocity versus dimensionless longitudinal distance

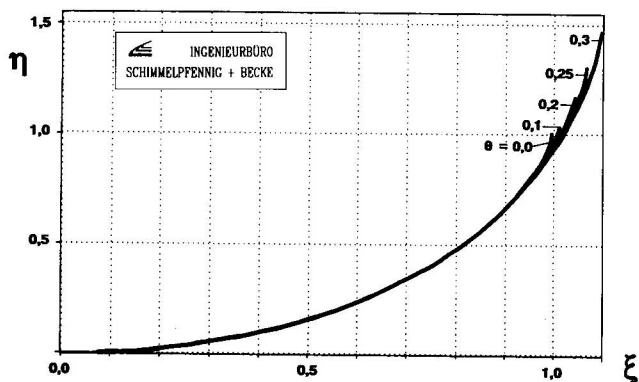


Bild 4 Verlauf des dimensionslosen Weges in Querrichtung über dem dimensionslosen Weg in Längsrichtung

Fig. 4 Dimensionless lateral distance versus dimensionless longitudinal distance

zeichnen, der Funktionsverlauf $\eta(\xi)$ bis $\xi = 0,9$ jedoch praktisch keine Abweichungen von der analytischen Lösung zeigt. Für $\Theta = 0,3$ ist der seitliche Versatz des Körpers in Fahrbahnquerrichtung in der Endlage allerdings bereits um den Faktor 1,5 größer als bei der analytischen Lösung. Bedenkt man, daß die Kraftschlußbeiwerte für Spiegeleis zwischen $\mu = 0,05$ und $\mu = 0,15$ liegen [2], so können derartige Werte des Parameters Θ bereits bei Fahrbahnquerneigungen von 3% erreicht werden und liegen damit durchaus im Bereich des Möglichen. Eine Berechnung des Querversatzes mit Hilfe der in [1] aufgestellten Beziehung würde unter diesen Umständen zu geringen Werten des Querversatzes führen. Mittels der Grafiken **Bild 3** und **Bild 4** läßt sich im Gegensatz zu den in [1] angegebenen Gleichungen nunmehr auch direkt der Querversatz als Funktion

der Auslaufstrecke in Längsrichtung angeben. Dabei zeigt sich, daß der Löwenanteil des Querversatzes erst unmittelbar vor dem Ende des Auslaufvorgangs zurückgelegt wird. Die dimensionslose Darstellung macht darüber hinaus deutlich, daß die Auslaufvorgänge unabhängig von der ursprünglichen Fahrgeschwindigkeit stets ähnlich sind, Ausgangsgeschwindigkeit und Haftbeiwert also nur den Maßstab beeinflussen.

Literaturnachweis

- [1] Schimmelpfennig, K.-H.; Rennich, D.: Hinweise auf die Bedeutung der Fahrbahnquerneigung in der Unfallrekonstruktion. Verkehrsunfall und Fahrzeugtechnik 24 (1986), S. 221 – 223.
- [2] Weber, R.: Der Kraftschluß von Fahrzeugreifen und Gummiprüben auf vereister Oberfläche. Dissertation, Karlsruhe 1970. ■